

2020~2021 年佛山市普通高中高三教学质量检测 (二)

数 学 参 考 答 案 与 评 分 标 准

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	D	C	D	C	B

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分.

题号	9	10	11	12
答案	BD	BC	AC	ABD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $4\sqrt{3}\pi$

14. $(-1,1)$

15. $\underline{6}$

16. $\underline{\frac{1}{2}}, (\frac{1}{2}, 1]$

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答须写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 由 $a_n - b_n = 2^n$ 得 $a_2 = b_2 + 4 = 5$, $a_4 = b_4 + 16 = 9$,2 分

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d = \frac{a_4 - a_2}{2} = 2$, $a_1 = a_2 - d = 3$ 3 分

则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$4 分

因为 $b_n = a_n - 2^n$,5 分

则 $S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (2 + 2^2 + \cdots + 2^n) = \frac{(3 + 2n + 1)n}{2} - \frac{2 \times (1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = n^2 + 2n - 2^{n+1} + 2$ 6 分

(2) 设 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 当 $q = 2$ 时, $\{a_n\}$ 是等比数列, 当 $q \neq 2$ 时, $\{a_n\}$ 不是等比数列.7 分

下面进行说明:

解法一: 由题意知 $a_n = 2^n + b_n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} + b_{n+1}}{2^n + b_n} = \frac{2^{n+1} + b_1 q^n}{2^n + b_1 q^{n-1}} = \frac{2 + b_1 (\frac{q}{2})^n}{1 + \frac{b_1}{q} (\frac{q}{2})^n}$,9 分

设 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q_2$, 则 $\frac{2 + b_1 (\frac{q}{2})^n}{1 + \frac{b_1}{q} (\frac{q}{2})^n} = q_2$, 整理得 $b_1 (\frac{q}{2})^n (1 - \frac{q_2}{q}) = q_2 - 2$, 则 $\begin{cases} 1 - \frac{q_2}{q} = 0 \\ q_2 - 2 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} q_2 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$,

因此当 $q = 2$ 时, $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比也是 2.12 分

解法二: 由题意知 $a_n = 2^n + b_n$, 由 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 得 $(2^{n+1} + b_{n+1})^2 = (2^n + b_n)(2^{n+2} + b_{n+2})$,9 分

因为 $b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2}$ 整理得 $2^{n+2} b_{n+1} = 2^n b_{n+2} + 2^{n+2} b_n$, 则 $4q = q^2 + 4$, 解得 $q = 2$,11 分

因此当 $q = 2$ 时, $\{a_n\}$ 是等比数列.12 分

解法三: 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $a_2^2 = a_1 a_3$, 即 $(b_2 + 4)^2 = (b_1 + 2)(b_3 + 8)$,8 分

即 $b_2^2 + 8b_2 + 16 = b_1b_3 + 8b_1 + 2b_3 + 16$, 即 $4b_2 = 4b_1 + b_3$, 即 $4b_1q = 4b_1 + b_1q^2$, 解得 $q = 2$10 分
 当 $q = 2$ 时, $a_n = b_1 \cdot 2^{n-1} + 2^n = (b_1 + 2) \cdot 2^{n-1}$,

因为 $b_1 > 0$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ (常数), 故 $\{a_n\}$ 是等比数列.12 分

18. 【解析】(1) 取 DE 中点 O , 连结 OP , OC , CE , 由翻折不变性可知 $OP \perp DE$, $OC \perp DE$2 分
 又 $OP \cap OC = O$, 所以 $DE \perp$ 平面 OPC3 分
 又 $PC \subset$ 平面 OPC , 所以 $DE \perp PC$4 分

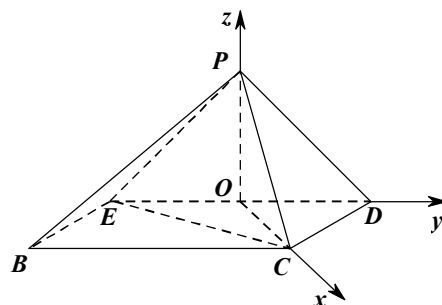
(2) 不妨设 $CD = 2$, 则 $PD = 2$, $OP = OC = \sqrt{2}$,

又 $PC = PD$, 所以 $OP^2 + OC^2 = PC^2$,

所以 $OP \perp OC$5 分

结合 (1) 可知 OP, OC, DE 两两垂直,

以 O 为原点, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 如图所示.6 分



则 $C(\sqrt{2}, 0, 0)$, $D(0, \sqrt{2}, 0)$, $E(0, -\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{2})$,7 分

所以 $\overrightarrow{EP} = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{BP} = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{CP} = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{DP} = (0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$,8 分

设平面 PBE 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{EP} = \sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BP} = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$,

令 $y = 1$, 得 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -1)$9 分

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{CP} = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DP} = -\sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$,

令 $z = 1$, 得 $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 1)$10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$11 分

所以平面 PBE 与平面 PCD 所成二面角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$12 分

19. 【解析】选择条件①: $\frac{\cos 2A}{a^2} - \frac{\cos 2B}{b^2} = \frac{1-2\sin^2 A}{a^2} - \frac{1-2\sin^2 B}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - 2(\frac{\sin^2 A}{a^2} - \frac{\sin^2 B}{b^2})$ 3 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 可得 $\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2}$, 所以 $\frac{\cos 2A}{a^2} - \frac{\cos 2B}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2}$,6 分

解得 $b = \sqrt{2}$, 因此 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$10 分

选择条件②: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = ca \cos B = ca \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1 + c^2 - b^2}{2} = \frac{3}{4}$, 则 $c^2 - b^2 = \frac{1}{2}$ ①3 分

再由 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1 + b^2 - c^2}{2b} = \frac{1}{2}$, 可得 $1 + b^2 - c^2 = b$ ②6 分

联立①②, 解得 $b = \frac{1}{2}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$10 分

选择条件③: $\sin A - \sin(A + \frac{\pi}{3}) = \sin A - (\sin A \times \frac{1}{2} + \cos A \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sin(A - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,3 分

则 $A = \frac{7\pi}{12}$, $B = \frac{\pi}{12}$, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 可得 $\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$, 解得 $b = 2 - \sqrt{3}$ 7 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times (2 - \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}$10 分

20. 【解析】(1) 当三顶点为长轴两顶点和短轴一顶点时, 此时边长分别为 $2a, a, a$, 不可能为正三角形.

.....1 分

所以正三角形的三顶点只能是短轴两顶点和长轴一顶点, 依题意得 $b = 1$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2b = \sqrt{3}$,3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$4 分

(2) 易得椭圆 C 的左焦点 F 的坐标为 $(-\sqrt{2}, 0)$5 分

显然直线 AB 的斜率不为 0, 设直线 AB 的方程为 $x = my - \sqrt{2}$6 分

联立 $\begin{cases} x = my - \sqrt{2} \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$, 消去 x 整理得 $(m^2 + 3)y^2 - 2\sqrt{2}my - 1 = 0$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,7 分

则 $\Delta = 12(m^2 + 1) > 0$, $y_1 + y_2 = \frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 3}$, $y_1 y_2 = \frac{-1}{m^2 + 3}$8 分

$|AF| \cdot |BF| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - 0| \cdot \sqrt{1+m^2} |y_2 - 0| = (1+m^2) |y_1 y_2| = \frac{1+m^2}{m^2+3}$9 分

直线 OP 的方程为 $x = my$, 联立 $\begin{cases} x = my \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$, 消去 x 整理得 $(m^2 + 3)y^2 - 3 = 0$ 10 分

$|OP|^2 = (1+m^2)y_P^2 = \frac{3(1+m^2)}{m^2+3}$11 分

所以 $|AF| \cdot |BF| = \frac{1}{3} |OP|^2$, 即存在常数 $\lambda = \frac{1}{3}$, 使得 $|AF| \cdot |BF| = \lambda |OP|^2$12 分

21. 【解析】(1) 不同的电路子模块共有 $A_3^3 = 6$ 种;2 分

(2) 6 种子模块正常工作概率的只有下面三种:

用 A 、 B 、 C 分别表示事件“1号位接入 A 、 B 、 C 型元件时, 子模块能正常工作”,

则 $P(A) = 0.9 \times [1 - (1 - 0.7) \times (1 - 0.8)] = 0.9 \times 0.94 = 0.846$,3 分

$P(B) = 0.8 \times [1 - (1 - 0.7) \times (1 - 0.9)] = 0.8 \times 0.97 = 0.776$,4 分

$P(C) = 0.7 \times [1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.9)] = 0.7 \times 0.98 = 0.686$,5 分

有 $P(A) > P(B) > P(C)$,

所以当1号位接入A型元件时,子模块正常工作的概率最大,为0.846.6分

(3)子模块正常工作的概率越大,期望利润会越高,应把A型元件接入1号位.7分

方法一:设每套子模块的利润为X,若能正常工作,则 $X=150-20-10=120$ 元,

若不能正常工作,则 $X=-20-10-450=-480$ 元,8分

所以X的分布列为

X	120	-480
P	0.846	0.154

.....10分

所以 $E(X)=120\times 0.846-480\times 0.154=27.6$ 元,11分

即生产1000套子模块的最大期望利润为 $1000\times 27.6=27600$ 元.12分

方法二:设1000套子模块中能正常工作的套数为X,利润为Y,8分

则 $X\sim B(1000,0.846)$,9分

且 $Y=150X-450(1000-X)-20\times 1000-(5+3+2)\times 1000=600X-480000$,10分

所以 $E(X)=1000\times 0.846=846$, $E(Y)=600E(X)-480000=27600$.

即生产1000套子模块的最大期望利润为 $1000\times 27.6=27600$ 元.12分

22. 【解析】(1) $f'(x)=e^x+\cos x-a$,1分

依题意,0是函数 $f(x)$ 的一个极值点,故 $f'(0)=e^0+\cos 0-a=0$,解得 $a=2$3分

当 $a=2$ 时, $f(x)=e^x+\sin x-2x$, $f'(x)=e^x+\cos x-2$,

令 $g(x)=e^x+\cos x-2$,则 $g'(x)=e^x-\sin x$,

当 $x>0$ 时, $g'(x)=e^x-\sin x>0$, $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数, $g(x)>g(0)=0$,故 $f'(x)>0$,

当 $-\pi<x<0$ 时, $e^x>0$, $-\sin x>0$,所以 $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上的增函数, $g(x)<g(0)=0$,

故 $f'(x)<0$,又 $f'(0)=0$,故0是函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,+\infty)$ 一个极小值点,

在区间 $(-\pi,+\infty)$ 上, $f(x)\geq f(0)$;5分

又当 $x\leq -\pi$ 时, $f(x)=e^x+\sin x-2x>-1+2\pi>f(0)$.

综上所述,满足条件的实数 $a=2$6分

(2)当 $x>2a+2$ 时, $f'(x)=e^x+\cos x-a>e^{2a+2}-1-a$,

又 $x>0$ 时, $e^x>x+1$,所以 $e^{2a+2}>2a+3$,

所以 $e^{2a+2}-1-a>2a+3-1-a=2+a>0$,即 $f'(x)>0$,7分

故当 $x>2a+2$ 时, $f(x)>f(2a+2)$,8分

因为 $\sin(2a+2)\geq -1$,所以 $f(2a+2)=e^{2a+2}+\sin(2a+2)-a(2a+2)\geq e^{2a+2}-1-2a^2-2a$ 9分

令 $h(a)=(e^{2a+2}-1-2a^2-2a)-6=e^{2a+2}-2a^2-2a-7$,10分

则 $h(0)=e^2-7>0$,注意到 $e^{2a+2}>2a+3$,

所以 $h'(a)=2e^{2a+2}-4a-2>2(2a+3)-4a-2=4>0$,

即 $h(a)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数,所以 $h(a)>h(0)=e^2-7>0$,

所以 $f(2a+2)>6$,故当 $x>2a+2$ 时, $f(x)>6$12分